

Pole placement – diskkrétne PID regulátory

Nastavovanie koeficientov diskrétnych regulátorov na základe predpísaných pólov uzavretého regulačného obvodu

Princípy pole-placement (PLP) regulácie

- Určenie koeficientov PSD regulátora na základe predpísania pólov uzavretého diskretného regulačného obvodu sa realizuje za účelom dosiahnutia požadovaných (predpísaných) dynamických vlastností.
- Metóda sa principiálne líši od predchádzajúcich metód, pretože vychádza z diskretnej prenosovej funkcie riadeného procesu a umožňuje návrh všeobecného diskretného regulátora..
- Proces je spojitý pre výpočet koeficientov diskretného regulátora potrebujeme diskretnú prenosovú funkciu procesu riadenia.

Matematická formulácia návrhu PLP regulátorov

$$G_P(z,0) = G_P(z) = \frac{B(z)}{A(z)} z^{-d} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}} z^{-d}$$

$$G_R(z) = \frac{Q(z)}{P(z)} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}}$$

$$1 + G_R(z)G_P(z) = 0$$

$$1 + \frac{Q(z)}{P(z)} \cdot \frac{B(z)}{A(z)} z^{-d} = 0$$

$$P(z)A(z) + Q(z)B(z)z^{-d} = 0$$

$$(1 - z^{-1})(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m}) + (q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2})(b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}) z^{-d} = 0$$

Žiadaný (predpísaný) charakteristický polynóm

$$A_Z(z) = 1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \dots + \alpha_{m+d+2} z^{-(m+d+2)} = 0$$

alebo
$$A_Z(z) = z^{m+d+2} + \alpha_1 z^{m+d+1} + \dots + \alpha_{m+d+2} = 0$$

$$A_Z(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_{m+d+2}) = 0$$

$$\text{CHP: } (1 - z^{-1})(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m}) + (q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2})(b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}) z^{-d} = 0$$



$$A_z(z) = 1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \dots + \alpha_{m+d+2} z^{-(m+d+2)} = 0$$

Porovnaním **CHP** s A_z pri rovnakých mocninách z^{-i} ($i = 1, 2, \dots, m+d+2$), získame koeficienty regulátora **q_0, q_1, q_2** .

- Pretože počet koeficientov je **$m+d+2$** , potrebujeme práve taký istý počet rovníc na výpočet koeficientov regulátora.
- Aby sme mohli jednoznačne určiť tri koeficienty regulátora, potrebujeme tri rovnice t.j.:

$$m + d + 2 = 3$$

$$m + d = 1$$

Poznámka: nie všetky žiadané póly nemožno umiestniť nezávisle.

Ak uvažujeme **PSD** regulátor, ktorý je získaný zo spojitého **PID** regulátora aj s filtrom (oneskorovacím členom), počet parametrov regulátora sa zvýši na **4**, t.j. všetky predpísané póly možno ľubovoľne umiestniť pre $m + d + 2 \leq 4$

(kde **m** je rád sústavy a **d** je dopravné oneskorenie), teda menovateľ polynómu **P₁(z)** má o jeden rád vyšší ako pôvodný polynóm **P** menovateľa **PSD** regulátora:

$$P_1(z) = (1 - z^{-1})(1 + p_1 z^{-1}) = P(z)(1 + p_1 z^{-1})$$

Demonštračný príklad: Vypočítať koeficienty diskretného PID regulátora, ak je známy model procesu a predpísané póly URO

$$G_p(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{Y(z,0)}{U(z)}$$

Predpísané póly:

$$z_1 = z_{p1}, \quad z_2 = z_{p2}, \quad z_3 = z_{p3}, \quad z_4 = z_{p4}$$

Hľadaný regulátor

$$G_R(z,0) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 + p_1 z^{-1})} = \frac{Q(z)}{P(z)}$$

CHRURO: $1 + G_R G_P(z,0) = 0$

$$(1 - z^{-1})(1 + p_1 z^{-1})(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}) + (q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2})(b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}) = A(z)$$

$$A_z(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \alpha_3 z^{-3} + \alpha_4 z^{-4} = (1 - z_{p1} z^{-1})(1 - z_{p2} z^{-1})(1 - z_{p3} z^{-1})(1 - z_{p4} z^{-1})$$

Po roznásobení a porovnání koeficientov pri rovnakých mocninách

$$\begin{array}{ll} p_1 = 0.678 & q_0 = 13.635558 \\ p_2 = 1.091084 & q_1 = -27.100534 \\ p_3 = 0.932025 & q_2 = 18.027713 \\ p_4 = 0.151755 & q_3 = -3.977764 \end{array}$$

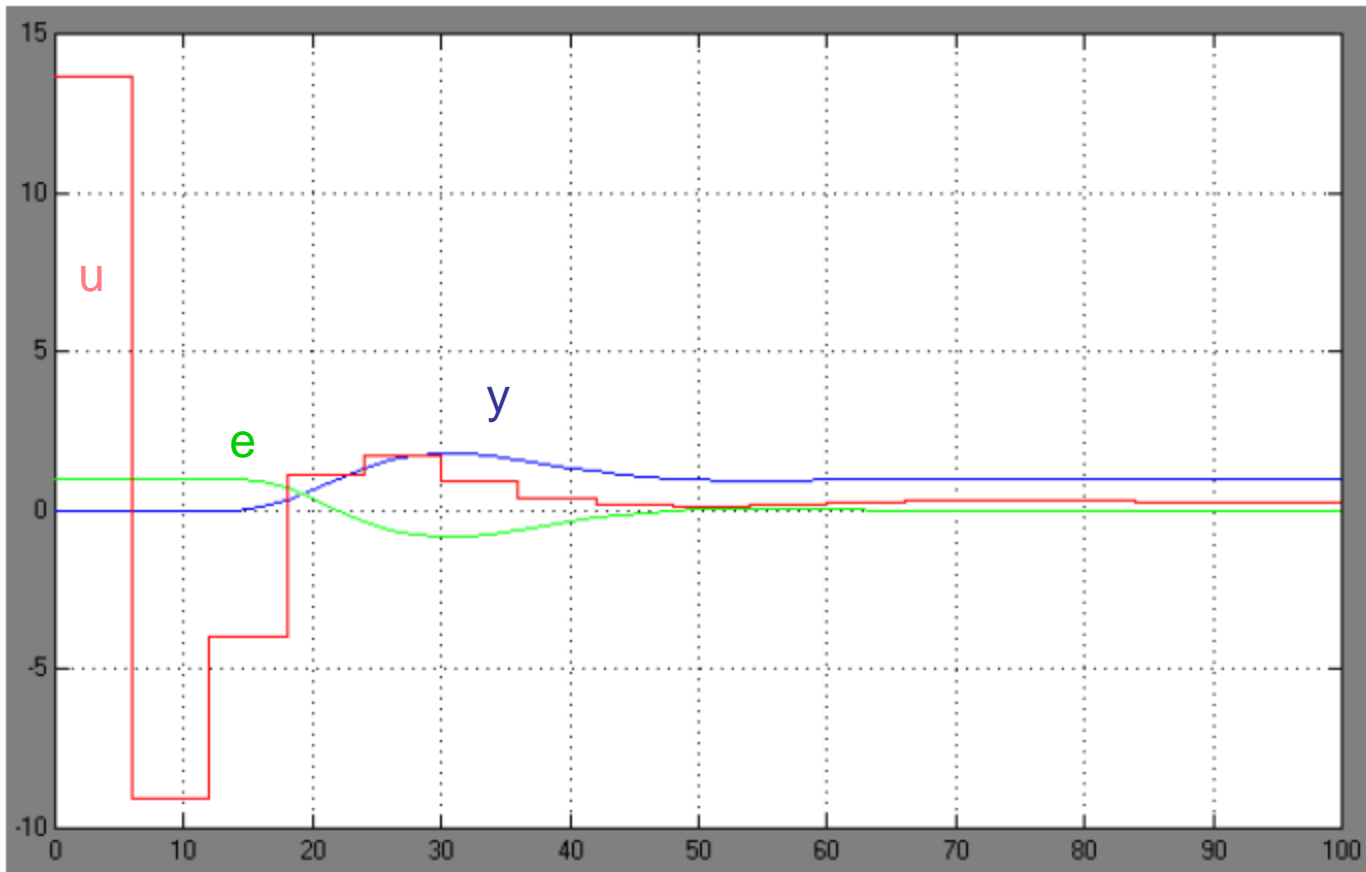
$$\text{Prenos regulátora: } Gr(z) = \frac{13.635558 - 27.100534z^{-1} + 18.027713z^{-2} - 3.977764z^{-3}}{1 - 0.322z^{-1} + 0.413084z^{-2} - 0.159059z^{-3} - 0.780270z^{-4} - 0.151755z^{-5}}$$

$$\begin{aligned} P(z) &= (1 - z^{-1}) \times (1 + 0.678z^{-1} + 1.091084z^{-2} + 0.932025z^{-3} + 0.151755z^{-4}) = \\ &= 1 - 0.322z^{-1} + 0.413084z^{-2} - 0.159059z^{-3} - 0.780270z^{-4} - 0.151755z^{-5} \end{aligned}$$

Diferenčná rovnica regulátora:

$$\begin{aligned} u(k) &= 0.322u(k-1) - 0.413084u(k-2) + 0.159059u(k-3) + 0.78027u(k-4) + 0.151755u(k-5) + \\ &+ 13.635558e(k) - 27.100534e(k-1) + 18.027713e(k-2) - 3.977764e(k-3) \end{aligned}$$

PLP regulátor - odozvy



Zovšeobecnenie : PLP

Žiadaný polynóm: $A_z(z) = 1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \dots + \alpha_l z^{-l} = 0$

Charakteristický polynóm URO:

$$C(z) = (1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \dots + p_\mu z^{-\mu})(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m}) + (q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \dots + q_\nu z^{-\nu})(b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}) z^{-d} = 0$$

Nulová regulačná odchýlka:

$$\lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) [1 - G_{y/w}(z)] W(z) = \lim_{z \rightarrow 1} [1 - G_{y/w}(z)] = 1 - G_{y/w}(1) = 0$$

$$\frac{B(1)Q(1)}{A(1)P(1) + B(1)Q(1)} = 1 \Rightarrow A(1)P(1) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\mu} p_i = -1$$

Počet neznámych parametrov regulátora: $\mu + \nu + 1$

Počet rovníc: $l + 1$

Počet rovníc = počet neznámych

$$\mu + \nu + 1 = l + 1$$

$$a. \mu \geq \nu + d \rightarrow l = m + \nu$$

$$\nu = m \quad \mu \geq m + d$$

$$b. \mu \leq \nu + d \rightarrow l = m + \nu + d$$

$$\mu = m + d \quad \nu \geq m$$

Minimálne stupne: $\nu = m, \mu = m + d$